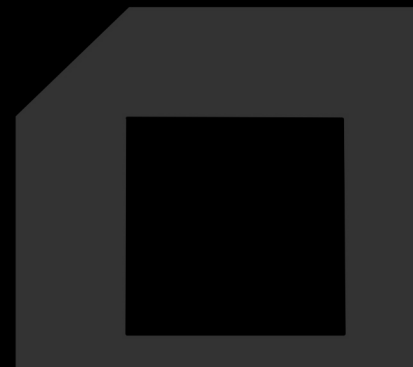
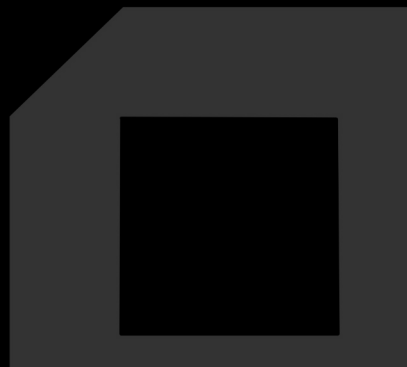
Doubt Yourself

Olimpíadas Portuguesas de Matemática XXXVIII
Fase Final

André Pinheiro

Novembro de 2022

4. Determina a soma de todas as frações da forma $\dfrac{1}{ab}$, onde $0 < a < b \leq 200$ são números naturais primos entre si tais que $a + b > 200$.

Solução

O problema pede para determinar a seguinte soma:

$$\sum_{\substack{\text{mdc}(a,b)=1,\\ 0<a<b\leqslant 200,\\ a+b>200}} \frac{1}{ab}$$

Solução

O problema pede para determinar a seguinte soma:

$$\sum_{\substack{\text{mdc}(a,b)=1,\\ 0<a<b\leqslant 200,\\ a+b>200}} \frac{1}{ab}$$

Ao invés de 200, vão restringir o problema para um número natural n superior a dois. Fica então,

$$\sum_{\substack{\text{mdc}(a,b)=1,\\ 0<a<b\leqslant n,\\ a+b>n}} \frac{1}{ab}$$

Solução

O problema pede para determinar a seguinte soma:

$$\sum_{\substack{\text{mdc}(a,b)=1,\\ 0<a<b\leqslant 200,\\ a+b>200}} \frac{1}{ab}$$

Ao invés de 200, vão restringir o problema para um número natural n superior a dois. Fica então,

$$\sum_{\substack{\text{mdc}(a,b)=1,\\ 0<a<b\leqslant n,\\ a+b>n}} \frac{1}{ab}$$

Seja S_n dada pela soma anterior

Quando n = 2, apenas existe um par (a, b), que é (1, 2). Portanto, $S_2 = ½$

Solução

O problema pede para determinar a seguinte soma:

$$\sum_{\substack{\text{mdc}(a,b)=1,\\ 0<a<b\leqslant 200,\\ a+b>200}} \frac{1}{ab}$$

Ao invés de 200, vão restringir o problema para um número natural n superior a dois. Fica então,

$$\sum_{\substack{\text{mdc}(a,b)=1,\\ 0<a<b\leqslant n,\\ a+b>n}} \frac{1}{ab}$$

Seja S_n dada pela soma anterior

Quando n = 2, apenas existe 1 par (a, b), que é (1, 2). Portanto, $S_2 = ½$

Quando n = 3, existem 2 pares (a, b), que são (1, 3) e (2, 3). Então $S_3 = 1/3 + 1/6 = ½$

Solução

O problema pede para determinar a seguinte soma:

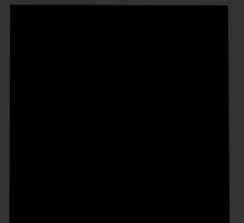
$$\sum_{\substack{\mathrm{mdc}(a,b)=1,\\ 0<a<b\leqslant 200,\\ a+b>200}} \frac{1}{ab}$$

Ao invés de 200, vão restringir o problema para um número natural n superior a dois. Fica então,

$$\sum_{\substack{\mathrm{mdc}(a,b)=1,\\ 0<a<b\leqslant n,\\ a+b>n}} \frac{1}{ab}$$

Seja S_n dada pela soma anterior

Quando n = 2, apenas existe 1 par (a, b), que é (1, 2). Portanto, $S_2 = ½$

Quando n = 3, existem 2 pares (a, b), que são (1, 3) e (2, 3). Então $S_3 = 1/3 + 1/6 = ½$

Quando n = 4, existem 3 pares (a,b), que são (1, 4), (3, 4) e (2, 3). Então $S_4 = 1/4 + 1/12 + 1/6 = ½$

Reparemos que a soma não varia para o valor de n escolhido, podemos então formular nossa primeira conjetura:

Conjetura 1: $S_n = ½$, *para qualquer número natural n > 1*

Solução

Conjetura 1: $S_n = 1/2$, *para qualquer número natural $n > 1$*

Vejamos como podemos provar a nossa conjetura.
Comecemos por analisar o padrão nos pares (a, b).
Seja P_n o conjunto dos pares (a, b) que respeitam as condições do problema para dado n inteiro positivo.

$P_2 = \{(1, 2)\}$
$P_3 = \{(1, 3), (2, 3)\}$
$P_4 = \{(1, 4), (3, 4), (2, 3)\}$
$P_5 = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (3, 4)\}$
$P_6 = \{(1, 6), (5, 6), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (3, 4)\}$
...

Solução

Conjetura 1: $S_n = ½$, *para qualquer número natural $n > 1$*

Vejamos como podemos provar a nossa conjetura. Comecemos por analisar o padrão nos pares (a, b). Seja P_n o conjunto dos pares (a, b) que respeitam as condições do problema para dado n inteiro positivo.

$P_2 = \{(1, 2)\}$
$P_3 = \{(1, 3), (2, 3)\}$
$P_4 = \{(1, 4), (3, 4), (2, 3)\}$
$P_5 = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (3, 4)\}$
$P_6 = \{(1, 6), (5, 6), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (3, 4)\}$
...

$P_2 = \{(1, 2)\}$
$P_3 = \{(1, 3), (2, 3)\}$

$P_3 = \{(1, 3), (2, 3)\}$
$P_4 = \{(1, 4), (3, 4), (2, 3)\}$

$P_4 = \{(1, 4), (3, 4), (2, 3)\}$
$P_5 = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (3, 4)\}$

$$0 < a < b \leqslant n, \quad a + b > n$$

Solução

Conjetura 1: $S_n = ½$, *para qualquer número natural* $n > 1$

Vejamos como podemos provar a nossa conjetura. Comecemos por analisar o padrão nos pares (a, b). Seja P_n o conjunto dos pares (a, b) que respeitam as condições do problema para dado n inteiro positivo.

$P_2 = \{(1, 2)\}$
$P_3 = \{(1, 3), (2, 3)\}$
$P_4 = \{(1, 4), (3, 4), (2, 3)\}$
$P_5 = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (3, 4)\}$
$P_6 = \{(1, 6), (5, 6), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (3, 4)\}$
…

$P_2 = \{(1, 2)\}$
$P_3 = \{(1, 3), (2, 3)\}$

$P_3 = \{(1, 3), (2, 3)\}$
$P_4 = \{(1, 4), (3, 4), (2, 3)\}$

$$0 < a < b \leqslant n,$$
$$a + b > n$$

$P_4 = \{(1, 4), (3, 4), (2, 3)\}$
$P_5 = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (3, 4)\}$

Reparemos que se $(a, b) \in P_n$, então $(a, b) \in P_{n+1}$ exceto quando $a + b = n + 1$ e que se $(a, b) \in P_{n+1}$, então $(a, b) \in P_n$ exceto quando $b = n + 1$. Ora, podemos ver que $S_{n+1} - S_n = T - Q$, em que T é a soma de todas as frações dos pares $(a, b) \in P_{n+1}$ em que $b = n + 1$ e Q é a soma de todas as frações dos pares $(a, b) \in P_n$ em que $a + b = n + 1$.

Solução

Conjetura 1: $S_n = ½$, *para qualquer número natural* *$n > 1$*

Como na soma T o b = n + 1 para todas as frações, vamos então somar todos os valores de a em que $1 \leq a < n+1$ e $\text{mdc}(a, n+1) = 1$, ou seja, T pode ser expresso pelo seguinte somatório:

$$T = \sum_{\substack{1 \leqslant a < n+1, \\ \text{mdc}(a, n+1) = 1}} \frac{1}{a(n+1)}$$

Solução

Conjetura 1: $S_n = ½$, *para qualquer número natural* $n > 1$

Como na soma T o b = n + 1 para todas as frações, vamos então somar todos os valores de a em que $1 \leq a < n+1$ e $\mathrm{mdc}(a, n+1) = 1$, ou seja, T pode ser expresso pelo seguinte somatório:

$$T = \sum_{\substack{1 \leqslant a < n+1, \\ \mathrm{mdc}(a,n+1)=1}} \frac{1}{a(n+1)}$$

Da mesma forma que na soma T, na soma Q, $a + b = n + 1 \Leftrightarrow a = n + 1 - b$ e como $a < b \Leftrightarrow n + 1 - b \leq b \Leftrightarrow (n+1)/2 \leq b$ e $\mathrm{mdc}(a, n + 1 - a) = 1$, podemos expressar Q pelo seguinte somatório:

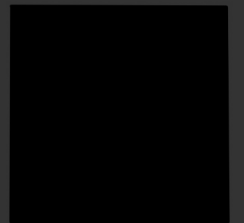
$$Q = \sum_{\substack{1 \leqslant a < \frac{n+1}{2}, \\ \mathrm{mdc}(a,n+1-a)=1}} \frac{1}{a(n+1-a)}$$

Solução

Conjetura 1: $S_n = ½$, *para qualquer número natural n > 1*

$$Q = \sum_{\substack{1 \leqslant a < \frac{n+1}{2}, \\ \mathrm{mdc}(a, n+1-a)=1}} \frac{1}{a(n+1-a)}$$

$$T = \sum_{\substack{1 \leqslant a < n+1, \\ \mathrm{mdc}(a, n+1)=1}} \frac{1}{a(n+1)}$$

Se T = Q, então T – Q = 0 e assim $S_{n+1} - S_n$ é constante para qualquer valor de n. Vamos tentar igualar as duas somas.

Solução

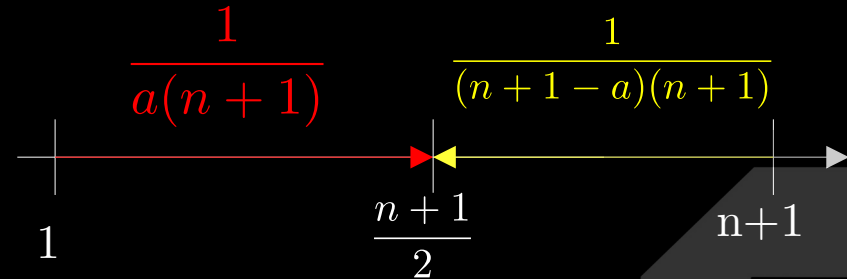
Conjetura 1: $S_n = ½$, *para qualquer número natural $n > 1$*

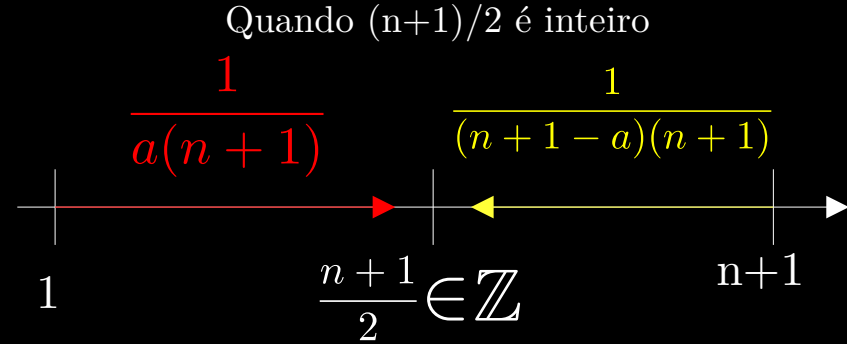
$$Q = \sum_{\substack{1 \leqslant a < \frac{n+1}{2},\\ \mathrm{mdc}(a,n+1-a)=1}} \frac{1}{a(n+1-a)}$$

$$T = \sum_{\substack{1 \leqslant a < n+1,\\ \mathrm{mdc}(a,n+1)=1}} \frac{1}{a(n+1)}$$

Se $T = Q$, então $T - Q = 0$ e assim $S_{n+1} - S_n$ é constante para qualquer valor de n. Vamos tentar igualar as duas somas. Podemos escrever T de outra forma:

$$T = \sum_{\substack{1 \leqslant a < n+1,\\ \mathrm{mdc}(a,n+1)=1}} \frac{1}{a(n+1)}$$

$$= \sum_{\substack{1 \leqslant a < \frac{n+1}{2},\\ \mathrm{mdc}(a,n+1)=1}} \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{n+1-a}\right)$$

Solução

Para reduzir o somatório, temos de criar mais um termo que será responsável por somar os valores de a superiores a (n+1)/2. Repare que quando (n+1)/2 é inteiro, apesar de a = (n+1)/2 não ser calculado pelo somatório reduzido, a = (n+1)/2 não é primo com n+1.

Prova:

$$\text{mdc}\left(\frac{n+1}{2}, n+1\right) = \text{mdc}\left(\frac{n+1}{2} \times 2, n+1\right) = \text{mdc}\,(n+1, n+1) \neq 1$$

Quando (n+1)/2 não é inteiro, todos os valores de a são contabilizados pelo somatório reduzido. Portanto, temos T de uma forma mais reduzida.

$$T = \sum_{\substack{1 \leqslant a < \frac{n+1}{2},\\ \text{mdc}(a,n+1)=1}} \frac{1}{a(n+1-a)}$$

Solução

Conjetura 1: $S_n = ½$, *para qualquer número natural n > 1*

$$Q = \sum_{\substack{1 \leqslant a < \frac{n+1}{2}, \\ \mathrm{mdc}(a, n+1-a)=1}} \frac{1}{a(n+1-a)}$$

$$T = \sum_{\substack{1 \leqslant a < \frac{n+1}{2}, \\ \mathrm{mdc}(a, n+1)=1}} \frac{1}{a(n+1-a)}$$

Única diferença agora é no mdc das duas somas. Repare que em Q, mdc(a, n+1-a) = mdc(a, n+1), através do algoritmo de Euclides.

Solução

Conjetura 1: $S_n = ½$, *para qualquer número natural n > 1*

$$Q = \sum_{\substack{1 \leqslant a < \frac{n+1}{2},\\ \mathrm{mdc}(a,n+1-a)=1}} \frac{1}{a(n+1-a)}$$

$$T = \sum_{\substack{1 \leqslant a < \frac{n+1}{2},\\ \mathrm{mdc}(a,n+1)=1}} \frac{1}{a(n+1-a)}$$

Única diferença agora é no mdc das duas somas. Repare que em Q, mdc(a, n+1-a) = mdc(a, n+1), através do algoritmo de Euclides. Portanto, a soma fica

$$Q = \sum_{\substack{1 \leqslant a < \frac{n+1}{2},\\ \mathrm{mdc}(a,n+1-a)=1}} \frac{1}{a(n+1-a)} = \sum_{\substack{1 \leqslant a < \frac{n+1}{2},\\ \mathrm{mdc}(a,n+1)=1}} \frac{1}{a(n+1-a)}$$

Solução

Conjetura 1: $S_n = ½$, *para qualquer número natural n > 1*

$$Q = \sum_{\substack{1 \leqslant a < \frac{n+1}{2}, \\ \mathrm{mdc}(a, n+1-a)=1}} \frac{1}{a(n+1-a)}$$

$$T = \sum_{\substack{1 \leqslant a < \frac{n+1}{2}, \\ \mathrm{mdc}(a, n+1)=1}} \frac{1}{a(n+1-a)}$$

Única diferença agora é no mdc das duas somas. Repare que em Q, mdc(a, n+1-a) = mdc(a, n+1), através do algoritmo de Euclides. Portanto, a soma fica

$$Q = \sum_{\substack{1 \leqslant a < \frac{n+1}{2}, \\ \mathrm{mdc}(a, n+1-a)=1}} \frac{1}{a(n+1-a)} = \sum_{\substack{1 \leqslant a < \frac{n+1}{2}, \\ \mathrm{mdc}(a, n+1)=1}} \frac{1}{a(n+1-a)}$$

Sendo assim, T = Q e assim podemos concluir que $S_{n+1} - S_n = T - Q = 0$ e portanto a nossa conjetura inicial é verdadeira!

Retornando ao problema inicial, temos que $S_{200} = S_2 = ½$

Portanto, a soma de todas as frações na forma 1/ab em que 0 < a < b ≤ 200, mdc(a, b) = 1 e a + b > 200 é ½ □

Solução

Resolução feita pela SPM

https://olimpiadas.spm.pt/Downloads/Ficheiros/Provas/XXXVIII%20OPM(2019-20)/XXXVIII_fbs.pdf